Homónima • Revista de Filosofía
Número 1, Vol. 1 (2026), pp. 473-484
ISSN 3087-260X
Santiago de Chile

EVITANDO MALINTERPRETAR EL MÍTICO TEOREMA DE INCOMPLETUD DE GÖDEL: QUÉ ES LO QUE EL TEOREMA DICE EN REALIDAD[1]

J. Sebastián Castillo[2]

1. Introducción:

El teorema de incompletud de Gödel es uno de los pocos teoremas pertenecientes a las matemáticas superiores cuya fama ha trascendido mucho más allá de las fronteras de esta disciplina. En Filosofía ha sido comentado y discutido, y en ocasiones se lo ha intentado utilizar en contextos distintos del que le es propio. A ese respecto, es atingente

[1] Publicado: 29 / 01 / 2026. Revista Open Access 4.0. *Artículos de la Revista Homónima*. (ISSN 3087-260X), Departamento de Educación y Ciencias Sociales de la Universidad Andrés Bello. Cómo citar: Castillo, S. (2026) Evitando malinterpretar el mítico teorema de incompletud de Gödel: qué es lo que el teorema dice en realidad. *Revista de Filosofía Homónima, 1*(1), pp. 453-484. https://doi.org/xxxxxxx[Por asignar]

[2] Sebastián Castillo es Doctor en Ciencias, con mención en Matemáticas de la Universidad de Chile; Profesor de lógica y lógica matemática; Profesor asociado del departamento de Filosofía y Humanidades de la Universidad de Chile; y Profesor adjunto del Departamento de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Email: castillo@uchile.cl.

mencionar el hecho de que su enunciado es notoriamente técnico, por lo que se lo suele citar en versiones muy simplificadas, que cambian su verdadero sentido; a veces, incluso, se lo trata como si simplemente dijese “hay verdades indemostrables”. La intención del presente artículo es explicar lo que realmente dice el teorema, de un modo no muy técnico.
La organización que adoptaremos será la siguiente (y mencionamos desde ya que la complejidad técnica irá de menos a más):

> — La sección 2 es una contextualización del tema, completamente no técnica.
> — En la sección 3 enunciaremos el teorema en una versión simplificada con respecto a su (bastante técnico) enunciado original, y realizaremos comentarios que pretenden ayudar a comprender lo que realmente dice el teorema (tal es nuestro principal objetivo en el presente artículo). Aquí ya aparecen algunos tecnicismos, pero intentaremos reducirlos a un mínimo, y explicarlos brevemente.
> — Finalmente, en la sección 4 esbozaremos someramente algunas de las ideas que utilizó Gödel para construir su demostración. Esta es la parte más complicada de seguir si no se tiene familiaridad previa con los temas en ella aludidos, e inevitablemente habrá que entrar en ciertos tecnicismos, pero es también “optativa”, al estar después de la sección 3, que es la que cumple nuestro objetivo principal de explicar lo mejor posible el verdadero significado del teorema de Gödel.

Importante: Haremos el intento de reducir al mínimo los términos técnicos, de modo que la explicación sea accesible sin necesidad de conocimientos avanzados, pero debemos admitir que seguramente será necesaria una familiaridad básica con la lógica formal para comprender las explicaciones contenidas en la parte 3, y aún más en la parte 4: lamentablemente, si se quiere dar una idea más o menos aproximada del verdadero enunciado del teorema, es imposible evitar un mínimo de términos propios de la lógica formal; mencionémoslos desde ya, para que los tenga usted en mente en caso de que les sean familiares: lenguaje formal, conjunto consistente (de afirmaciones), demostración formal, sistema axiomático. En caso de que no le sean familiares, mencionamos desde ya que incluiremos aquí las definiciones de algunos de estos términos.

2. El teorema de incompletud, su trascendencia y sus dificultades

Los usualmente llamados *teoremas de incompletud* (o *incompletitud*) del eminente lógico y matemático Kurt Gödel fueron publicados en 1931, y constituyen un hito trascendental en la historia de la lógica matemática y de la matemática en general. Además, el primero de estos dos teoremas (que es el que suele ser aludido como *el* teorema de incompletud de Gödel) es sin duda uno de los resultados pertenecientes a las matemáticas superiores que más ha sido aludido y comentado fuera de esta disciplina (¡probablemente el que más!).

En particular, en filosofía tiene evidente interés, y ha sido objeto de numerosos comentarios, discusiones, y algunos intentos de aplicación fuera de su contexto original. Al hacer esto último (intentar aplicarlo fuera de su contexto original), a veces se lo ha interpretado casi como si el teorema dijera “hay verdades que son indemostrables”, y desde ahí se da el paso a que “por el mismo teorema, en tal o cual área (distinta de las matemáticas) tendremos verdades indemostrables”. Pero lo que el teorema afirma no es simplemente que “hay verdades indemostrables”; lo que afirma es que en un cierto contexto *concretamente delimitado* existen *determinados tipos* de afirmaciones que no son demostrables ni refutables *dentro de los límites correspondientes a ciertas herramientas*.

Pretender que el teorema puede aplicarse directamente en otros ámbitos implica que no se comprende (o no se conoce) lo que en realidad dice. En relación con ello, destaquemos el hecho de que su enunciado es bastante técnico y, consecuentemente, las personas que se aproximan a él desde otras disciplinas lo hacen, casi siempre, a través de versiones simplificadas —o ultrasimplificadas—, que pueden conducir fácilmente a una interpretación errada de este teorema. El aludido intento que en ocasiones se ha hecho de aplicarlo fuera del ámbito que le es propio no sólo es "riesgoso", sino que en propiedad es automáticamente equivocado: un teorema matemático dice *exactamente* lo que dice, ni un ápice más, y ello (lo que dice) se refiere estricta y específicamente a los términos técnicos que aparecen en él, los que a su vez han sido previamente definidos de manera precisa, en un contexto matemático específico.

Lo que haremos a continuación, entonces, será intentar describir el enunciado del primer teorema de incompletud de Gödel de manera accesible, pero al mismo tiempo lo más apegada que sea posible a su verdadero significado; y a continuación, en la última parte, esbozaremos algunas de las ideas principales de su demostración.

3. Lo que *realmente* dice el teorema de incompletud

Comenzaremos esta parte mencionando, sólo a título ilustrativo, el enunciado con el que aparece en el artículo original de 1931: "Para cada clase recursiva primitiva y ω-consistente *K* de fórmulas, existe un signo de clase *r* tal que ni *v Gen r* ni Neg(*v Gen r*) pertenecen a Flg(*K*), donde *v* es la variable libre de *r*".

> (La lectura del enunciado original hace ciertamente comprensible el hecho, que antes hemos mencionado, de que las personas que se aproximan al teorema desde otras disciplinas lo hacen, casi siempre, a través de versiones sumamente simplificadas.)

Enunciemos ahora, entonces, nuestra versión informal del teorema. Para ello, recordemos que, como dijimos en la introducción, si bien haremos el intento de reducir al mínimo los términos técnicos, es imposible evitar un mínimo de expresiones propias de la lógica formal; por ese motivo, a continuación de nuestro enunciado informal del teorema incluiremos un recuadro que resume las definiciones involucradas en él. Y destaquemos, también, que *es muy importante tener en mente que ninguna versión informal del teorema expresará exactamente lo que él dice, siempre será sólo una aproximación* (ello es válido, de hecho, para cualquier teorema matemático de cierto grado de complejidad técnica, y también es válido para el esbozo que realizaremos en la sección 4 de algunas de las ideas de la demostración).

Primer teorema de incompletud de Gödel (versión informal): Si se utiliza un lenguaje formal para establecer un sistema axiomático que es consistente y que permite formar un sistema de números naturales, entonces existe al menos una afirmación referente a dicho sistema axiomático que es verdadera pero que no se puede demostrar dentro del mismo sistema axiomático.

NOTA: Las siguientes las definiciones han aparecido en nuestra versión informal del teorema de incompletud (las plantearemos de manera más bien informal: no son definiciones realmente rigurosas — o derechamente son no rigurosas):
— Un lenguaje formal es un conjunto de símbolos, que posteriormente se usará para expresar simbólicamente determinados tipos de afirmaciones. A diferencia de los lenguajes naturales, en un lenguaje formal se fija desde el principio la totalidad de los símbolos que se usarán: no se pueden ir incorporando otros símbolos posteriormente.
— Un axioma es, en matemáticas, una afirmación que se da por aceptada sin demostración. El motivo por el que se la acepta puede ser que se la considera evidente, pero no necesariamente ha de ser por ello: en este contexto técnico, lo que importa es el hecho en sí de que se la acepta sin demostración; el motivo por el que no se pidió demostración alguna, es irrelevante. Al elegir un grupo de axiomas para proceder a realizar deducciones a partir de ellos, se ha establecido un sistema axiomático.

— Un conjunto inconsistente (de afirmaciones) es un grupo de afirmaciones a partir de las cuales es posible deducir una contradicción (es posible deducir a partir de ellas que una cierta afirmación es verdadera y que es falsa, cosa que *en principio* va contra lo aceptable). Lo contrario es un conjunto consistente (de afirmaciones): un grupo de afirmaciones a partir de las cuales es imposible deducir una contradicción.
—Los números naturales son "los que sirven para contar": 1, 2, 3, 4, 5, etc. Así que el número -3 no es un número natural, ni tampoco lo es el número ½, ni el número π. Mencionaremos también, por si hay dudas al respecto, que en algunos contextos matemáticos —como en teoría de conjuntos— se cuenta al cero como número natural. En general, en matemáticas, al trabajar en un contexto específico, es totalmente optativo elegir contar el cero como número natural o no hacerlo, sólo hay que asegurarse de explicitar la opción elegida.

Es importante mencionar que la "afirmación indemostrable" a la que se refiere el teorema no puede ser demostrada *dentro* del sistema axiomático con que se está trabajando, pero en principio es perfectamente factible que por fuera de dicho sistema sea posible construir una demostración de esta afirmación. Pero entonces, ¿por qué este teorema es considerado tan *demoledor* dentro de las matemáticas?: porque en matemáticas *siempre* se está trabajando dentro de *algún* sistema axiomático (a veces no explícitamente declarado), y una vez que nos hemos instalado ahí, por el teorema no podremos demostrar algunos resultados referentes a entidades de este mismo sistema (si el sistema cumple con las hipótesis del teorema). El tan extenso alcance que este teorema tiene en matemáticas se relaciona directamente con el hecho de que él no sólo se aplica a un sistema axiomático específico, ni a un grupo pequeño de ellos, sino a una cantidad infinita de sistemas axiomáticos, incluyendo a muchísimos de los que se utilizan en las matemáticas *reales*.

Observación: Según indica su enunciado, el teorema no es válido si el sistema adoptado no es lo suficientemente potente como para que en él podamos formar un sistema de números naturales; pero virtualmente todas las áreas de las matemáticas en las que en la práctica se trabaja requieren de la capacidad de contar, y por lo tanto necesitan disponer de un sistema de números naturales. Así que en la práctica el teorema de Gödel es aplicable a la mayor parte de la matemática *real*. Es atingente mencionar al respecto que en muchas áreas de la matemática los axiomas que permiten formar a los números naturales se suelen dar por subentendidos; es frecuente no explicitarlos, salvo en algunas áreas.

Observación: La otra excepción posible a la aplicabilidad del teorema, según indica su enunciado, es que el sistema axiomático adoptado sea inconsistente; pero un sistema tal es matemáticamente inútil: si de un sistema axiomático sabemos que es inconsistente, no lo utilizaremos. En propiedad, hay muchísimo que decir respecto a la consistencia e inconsistencia de sistemas axiomáticos, sobre todo a partir del *segundo* teorema de incompletud de Gödel; pero ello escapa por completo al alcance del presente artículo.

4. Esbozo de algunas ideas de la demostración del teorema

Como se mencionó en la introducción, esta sección final es la parte más complicada de este artículo si no se tiene familiaridad previa con los temas en ella aludidos, y aquí ya no podremos evitar entrar en algunos tecnicismos; pero esta parte es también “optativa”, en el sentido de que ya hemos ejecutado nuestro principal objetivo: dar una idea informal del enunciado del teorema, de una manera lo menos técnica posible, pero al mismo tiempo lo más apegada posible a su verdadero significado.

Vamos entonces con nuestro esbozo de algunas de las ideas sobre las que se construyó la demostración del teorema. Para lograr esta demostración, Gödel procedió a asignar un número natural a cada símbolo del lenguaje formal, y a partir de ello asignar un número natural a cada *afirmación* construida con el lenguaje formal (afirmaciones técnicamente llamadas “fórmulas bien formadas”), y a partir de ello asignar un número natural a cada *demostración* formal dentro del sistema. Una demostración consiste en una sucesión de afirmaciones relacionadas de ciertos modos, pero aquí lo importante es el hecho en sí de que es una sucesión de afirmaciones; dados números naturales asignados a dichas afirmaciones, el procedimiento de Gödel asigna, en base a ellos, un número a la sucesión de afirmaciones que es la demostración. Tras ello, el procedimiento que ideó Gödel permite, además de lo anterior, hacer algo notabilísimo: “codificar aritméticamente” ciertas *afirmaciones referentes a demostraciones realizadas dentro del sistema axiomático*. Compréndase bien: no sólo hablamos de asignar números a demostraciones, sino de codificar aritméticamente *afirmaciones referentes a demostraciones*. En términos más técnicos, el procedimiento de Gödel “codifica aritméticamente” ciertos conceptos metamatemáticos referentes al sistema axiomático y lógico utilizado, como el concepto de “sustituir una variable en una fórmula” o el de “ser demostrable dentro del sistema”. Esta es, por mucho, la parte más sofisticada (y más técnica, y más extensa) de la demostración, y debe considerarse sencillamente brillante: es difícil sobreestimar la genialidad de Gödel, tanto al haber concebido la idea de “codificar aritméticamente” conceptos metamatemáticos, como al haberlo logrado, pues idear un procedimiento que concrete esta idea es descomunalmente no trivial.

El hecho de que es posible hacer las mencionadas asignaciones de números tiene relación directa con un resultado de la teoría de conjuntos que indica que la unión numerable de conjuntos numerables produce un conjunto numerable. Sin entrar en detalles al respecto, digamos que, aunque los símbolos de un lenguaje formal son tantos como los números naturales, y las afirmaciones formadas dentro del sistema son tantas como los números naturales, y las demostraciones formales son tantas como los números naturales, por las particulares propiedades de los conjuntos infinitos resulta que es posible asignar un número natural distinto a cada símbolo del lenguaje y a cada afirmación y a cada demostración formal. La idea de poner en correspondencia hechos aritméticos con propiedades metamatemáticas de sistemas axiomáticos está en el núcleo de la demostración del teorema de incompletud, y se logra tras el trabajo previo de "aritmetización" de símbolos, afirmaciones y demostraciones. Lo único que habremos de agregar, antes de finalizar este artículo, será un muy somero esbozo de las bases de este proceso de "aritmetización". Nos conformaremos, eso sí, con dar sólo una idea muy vaga (*tenemos* que conformarnos con ello, por el carácter no *tan* técnico dentro del que estamos limitándonos).

Queremos entonces visualizar cómo es posible asignar números a cada símbolo del lenguaje formal, y a cada afirmación (fórmula bien formada), y a cada demostración formal, de modo que la asignación sea "bidireccional": no sólo debe asignarse un número, sino que el número asignado a un símbolo, afirmación o demostración, no puede haber sido asignado a ningún otro símbolo, afirmación, o demostración. Hay más de un modo de realizar esta asignación, pero lo natural (y así lo hizo Gödel) es basarla en un muy importante teorema referente a los números naturales conocido como *Teorema Fundamental de la Aritmética* (¡su nombre refleja por sí mismo su importancia!). En virtud de este teorema, cada número natural puede escribirse como multiplicación de números primos, y de una manera única salvo por el orden en que se escriben los factores. Por ejemplo, el número 12 se puede escribir como el producto de factores primos $12 = 2 \times 2 \times 3$, o lo que es lo mismo, $12 = 2^2 \times 3^1$. Note que hay otros modos de escribir el número 12 como multiplicación de números naturales, por ejemplo $12 = 4 \times 3$, o también $12 = 2 \times 6$; pero estas otras representaciones no constan de sólo números primos (el número 4 no es primo, el número 6 no es primo). Para escribirlo como producto de primos, no hay otro modo que multiplicando dos números 2 y un número 3; sólo se podría variar el orden en que se escriben.

Para los efectos que aquí nos interesan, lo importante es que el Teorema Fundamental de la Aritmética establece una relación biunívoca entre cada número natural y un determinado conjunto de números primos elevados a determinados exponentes, y como resultado de ello, vemos que especificar un determinado conjunto de números primos y un determinado exponente para cada uno de ellos es equivalente a especificar un determinado número natural. Como dijimos, no entraremos en los detalles del proceso utilizado por Gödel (si no se tiene familiaridad previa con procedimientos de ese tipo, resultan bastante complicados de seguir), pero la idea es que después de asignar un número a cada símbolo del lenguaje formal, al ahora tomar una afirmación (una fórmula bien formada), los números correspondientes a los símbolos que aparecen en ella se usan para asignar exponentes a los primeros números naturales primos (2, 3, 5, 7, 11, ...). Por ejemplo, supongamos que al símbolo de igualdad se le asignó el número 2 y que al símbolo del número cero se le asignó el número 5; entonces a la afirmación 0=0 se le asignaría el número $2^5 \times 3^2 \times 5^5 = 900.000$. El punto es que el Teorema Fundamental de la Aritmética garantiza que con este procedimiento ningún número natural puede corresponder a más de una afirmación (fórmula bien formada), porque la descomposición en factores primos de cualquier número natural es única. En el ejemplo anterior, la única manera de descomponer el número 900.000 en factores primos es $2^5 \times 3^2 \times 5^5$. Y de modo análogo se lleva a cabo la codificación numérica de las demostraciones. En cuanto a las afirmaciones metamatemáticas, no podemos aspirar a describir aquí ni siquiera una idea aproximada de su construcción, pues ella requiere conceptos y procedimientos muchísimo más complejos.

Si bien es difícil que la muy breve descripción que hemos realizado permita hacerse una idea realmente clara del procedimiento concreto de la demostración (salvo si desde antes se contaba con conocimientos al respecto), al menos dará una cierta noción del tipo de ideas que permiten hacer corresponder hechos aritméticos con entidades relacionadas con sistemas axiomáticos. Concluiremos este artículo con dos observaciones finales:

— La descripción que hemos realizado de algunas ideas de la demostración del teorema permite comprender la necesidad de la hipótesis, en su enunciado, referente a que el sistema axiomático permita formar un sistema de números naturales: la demostración requiere, intrínsecamente, disponer de los números naturales.

— Repitamos algo ya mencionado, pero que es importantísimo de comprender y recordar: *ninguna versión informal del teorema expresará exactamente lo que dice el teorema, siempre será sólo una aproximación* (y mientras menos técnica es la versión, más alejada estará del verdadero significado del teorema). Lo mismo es válido para cualquier teorema matemático de cierto grado de complejidad técnica, así como para el esbozo que hemos realizado de algunas de las ideas de la demostración del teorema de Gödel, en que inevitablemente nos hemos visto en la obligación de incurrir en omisiones e inexactitudes, en vista de los límites dentro de los que aquí nos hemos situado.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

1. En internet, en https://users.dcc.uchile.cl/~cgutierr/otros/godel.pdf se encuentra disponible el artículo *El Teorema de Incompletitud de Gödel (Versión para no iniciados)* de Claudio Gutiérrez, académico del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Chile. En este artículo (originalmente publicado en Revista Cubo Mat. Educ., Universidad de la Frontera, Vol. 1, 1999, páginas 68-75) se entrega una resumida contextualización histórica y filosófica de los teoremas de incompletud de Gödel, y se resumen también los pasos principales de la demostración de estos dos teoremas.

2. En la dirección web: https://www-quantamagazine-org.translate.goog/how-godels-proof-works-

20200714/?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=es&_x_tr_hl=es&_x_tr_pto=tc se entregan varios detalles sobre el modo en que, en la demostración del teorema, se asignan números naturales y se hacen corresponder hechos aritméticos con propiedades de sistemas axiomáticos. El texto está en inglés, pero si se accede vía Google se ofrece opción de traducción.

3. En lengua hispana tenemos el privilegio de contar con una traducción que abarca casi todos los trabajos y escritos de Gödel, realizada por Jesús Mosterín, quien también elaboró comentarios introductorios para muchos de los artículos. El libro es K. Gödel, *Obras Completas*, Alianza Editorial, Madrid, 1981, 1989, 2006, 2018. En él se encuentra, en particular, "Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines", traducción a nuestro idioma del artículo original de Gödel publicado en 1931: "Über formal unentscheidbare Sätze der Principa Mathematica und verwandter Systeme".